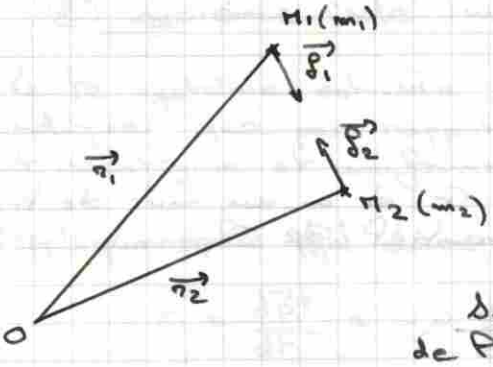
# Chap XII : Systèmes de 2 particules

## I énergie potentielle d'interaction :




On suppose le système $M_1, M_2$ isolé (soit très éloigné de toute influence extérieure). La force qui s'exerce sur une particule est due à l'autre et vice-versa.

Si l'interaction est instantanée, le principe de l'action et de la réaction donne :

$$\vec{f_2} = -\vec{f_1}$$

Si l'interaction ne dépend que de la position relative de $M_1$ et $M_2$, on peut poser une fonction $U(r)$ où $r = \|\vec{r_2} - \vec{r_1}\|$ telle que :

$$\vec{f_1} = -\overrightarrow{\text{grad}}_{M_1} U \qquad \vec{f_2} = -\overrightarrow{\text{grad}}_{M_2} U$$

$\text{grad}_{M_1}$ implique qu'on dérive /t aux coordonnées de $M_1$.

La fonction U est l'énergie potentielle d'interaction des 2 particules.

ex :

$U = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}$ interaction électrostatique

$U = -G\frac{mm'}{r}$ interaction gravitationnelle.

Rq: $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ définies comme ci-dessus satisfont automatiquement au principe de l'action et de la réaction.

Vérifions-le :

$$f_{1x} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{dU}{dr} \times \frac{\partial r}{\partial x_1}$$

or $r = \left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right]^{1/2}$

donc $\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x_2-x_1}{r}$

$$f_{1x} = +\frac{dU}{dr}\frac{x_2-x_1}{r} = -\frac{dU}{dr}\frac{x_1-x_2}{r} = +\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -f_{x_2}$$

CQFD

$$\boxed{\vec{f_1} = -\frac{dU}{dr}\vec{u_{12}} = -\vec{f_2}}$$ car $\vec{u_{12}}\begin{pmatrix}\frac{x_2-x_1}{r}\\ \frac{y_2-y_1}{r}\\ \frac{z_2-z_1}{r}\end{pmatrix}$

et de position donnée par $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (où O est une origine arbitraire (G ou un autre pt)).
La vitesse et l'accélération de M sont celles du mvt relatif. De plus son moment cinétique et son énergie cinétique s'identifient à $\vec{J}^*$ et $K^*$. Dans le cas d'un système isolé, cette notion va simplifier les calculs.

## 2) système isolé : mouvement relatif :

Si le système est isolé, le théorème de la résultante cinétique indique que par rapport à R supposé galiléen, le mvt de G est rectiligne et uniforme. Donc $R^*$ est galiléen.

Appliquons le pfd dans $R^*$ :

$$\vec{f_1} = \frac{d\vec{p_1}^*}{dt} = -\mu \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{f_2} = \frac{d\vec{p_2}^*}{dt} = \mu \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\mu \vec{a} = \vec{f_2} = -\vec{f_1}$$

Par intégration, on arrive à $\vec{r}$. Ceci peut être considéré comme l'équation du mobile réduit.

on a $m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

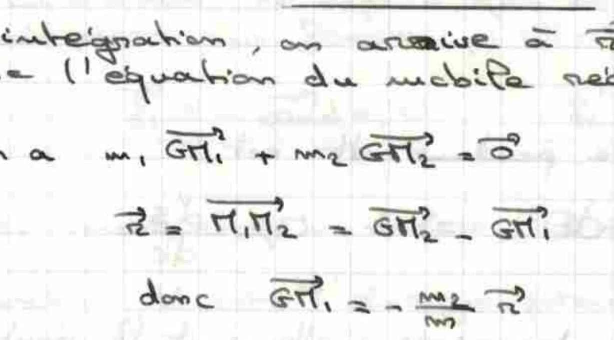
$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}$$

donc $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m}\vec{r} \qquad \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m}\vec{r}$

Les trajectoires de $M_1$ et $M_2$ se déduisent de celles de M par des homothéties de centre G et de rapports respectifs $-\frac{m_2}{m}$ et $\frac{m_1}{m}$

ex: mvt d'une étoile double : $\frac{m_1}{m_2} = 2$ donc $-\frac{m_2}{m} = -\frac{1}{3}$

et $\frac{m_1}{m} = \frac{2}{3}$



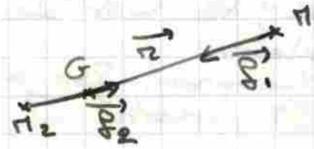

Rq: si $m_1 \gg m_2$ alors $\mu \simeq m_2$ La particule la plus massive est presque immobile (ex : Terre + satellites ; Soleil + planètes : $\frac{m_1}{m_2} = 1047$ pour Jupiter ; atome d'hydrogène $\frac{m_1}{m_2} = 1836$)

## ③ Conservation du moment cinétique :

Appliquons le théorème du moment cinétique au système isolé :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G\,ext} = \vec{0}$$

on peut retrouver ceci en disant que d'après le principe de l'action et de la réaction, le mvt est à force centrale (la force passe à tout instant par G.



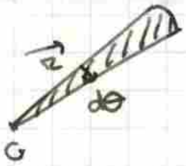
$$\vec{\sigma}^* = \mu\, \vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \mu\, \vec{v} \wedge \vec{v} + \mu\, \vec{r} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

Posons $\quad \vec{\sigma}_0 = \mu \vec{C} \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{C} = \vec{r_0} \wedge \vec{v_0}$

Plaçons-nous en coordonnées polaires $(r, \theta)$ de pole G :

$$r^2 \dot{\theta} = C = \frac{\sigma_0}{\mu} \qquad (1)$$



L'aire balayée pendant dt est :

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow C = 2\frac{dS}{dt}$$

C est la constante des aires : elle vaut le double de la vitesse aréolaire.

(1) exprime la loi des aires.

Le rayon vecteur $\vec{r} = \vec{M_1M_2} = \vec{GM}$ balaye des aires égales en des temps égaux.

## ④ conservation de l'énergie :

Le système étant isolé, son énergie mécanique reste constante :

Dans $R^*$, $\quad E^* = K^* + U(r) = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r) = E_0$

Si on se place à nouveau en polaires $(r, \theta)$ de pole G :

$$\boxed{E^* = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) = E_0}$$

## ⑤ étude générale du mvt du pt M :

## II Le problème à deux corps :

### ① référentiel barycentrique :

#### ⓐ rappels :

on pose $m = m_1 + m_2$  Soit G le centre de masse du système.

$$\vec{OG} = \frac{1}{m}\left(m_1 \vec{OM_1} + m_2 \vec{OM_2}\right)$$

Soit $\vec{v_G} = \frac{1}{m}\left(m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}\right)$

$$\vec{P} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m \vec{v_G}$$

Le réf barycentrique $R^*$ est centré en G et a un mvt de translation à la vitesse $\vec{v_G}$ par rapport au référentiel de Copernic.

#### ⓑ quantités de mouvement :

Dans $R^*$, $\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_G = -\frac{m_2}{m}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = -\frac{m_2}{m}\vec{v}$

$$\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1}{m}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = \frac{m_1}{m}\vec{v}$$

$\vec{v}$ est la vitesse relative de $M_2$ par rapport à $M_1$.

Introduisons la grandeur appelée masse réduite :

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

on a $\vec{p}_1^* = m_1 \vec{v}_1^* = -\mu \vec{v}$

$$\vec{p}_2^* = m_2 \vec{v}_2^* = \mu \vec{v}$$

on remarque qu'on a bien $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$

#### ⓒ moment cinétique :

$$\vec{\sigma}^* = \vec{GM_1} \wedge \vec{p}_1^* + \vec{GM_2} \wedge \vec{p}_2^* = \mu\left(\vec{GM_2} - \vec{GM_1}\right) \wedge \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}^* = \mu\, \vec{r} \wedge \vec{v}}$$

Rq : le moment cinétique barycentrique est indépendant du pt par rapport auquel on le calcule.

#### ⓓ énergie cinétique :

$$K^* = \frac{p_1^{2*}}{2m_1} + \frac{p_2^{2*}}{2m_2} = \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) v^2$$

$$\boxed{K^* = \frac{1}{2}\mu v^2}$$

On voit que $K^*, \vec{\sigma}^*, \vec{p}_1^*, \vec{p}_2^*$ ne font intervenir que le mvt

On a les intégrales premières du mouvement suivantes :

$$\sigma_0 = \mu r^2 \dot{\theta}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \quad r^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

soit $$E_0 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{\sigma_0^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

$\sigma_0$ et $E_0$ sont des constantes que l'on détermine avec les conditions initiales.

Le terme $\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2$ est l'énergie cinétique d'un pt matériel de masse $\mu$ en mouvement rectiligne et uniforme. On est donc amené à poser :

$$\boxed{U_{eff} = \frac{\sigma_0^2}{2\mu r^2} + U(r)}$$

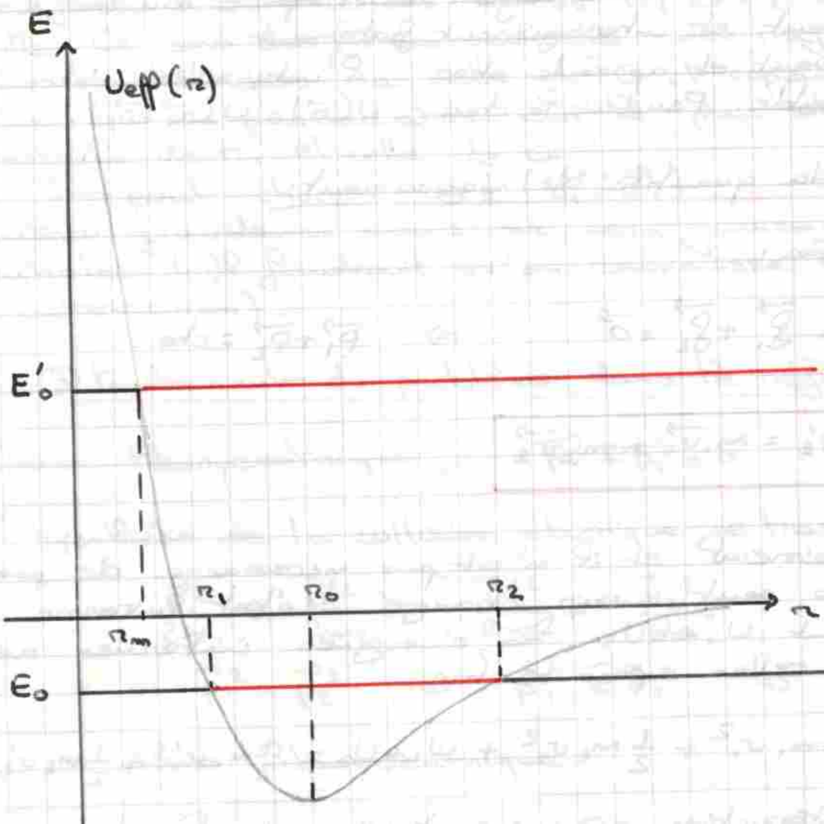
$U_{eff}$ porte le nom de potentiel effectif. C'est une notion très utile.

alors $E_0 = K + U_{eff} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}$

écrivons cette relation sous forme différente :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mu}(E_0 - U_{eff})$$

Sachant que $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \geq 0$ et connaissant $E_0$ et la forme de $U_{eff}$, une étude graphique donne les domaines de variation de $r$.




Imaginons un potentiel effectif de cette forme.

Les valeurs possibles de $r$ sont telles que $E_0 - U_{eff} \geq 0$

★ pour $E_0$, $r \in [r_1, r_2]$ ; les 2 particules restent à distance finie : c'est un <u>état lié</u>.

★ pour $E'_0$, $r \in [r_m, +\infty[$ ; le mobile vient de l'infini jusqu'à une distance minimale $r_m$ et repart à l'infini. C'est un <u>état de diffusion</u>. C'est caractéristique d'une collision.

Les domaines ayant été déterminés, on cherche alors $r = f(t)$ et $r = f(\theta)$.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\mu}\left(E_0 - U_{eff}(r)\right)$$

soit $$t = \pm \int \frac{dr}{\left[\frac{2}{\mu}\left(E_0 - U_{eff}(r)\right)\right]^{1/2}} + cte$$

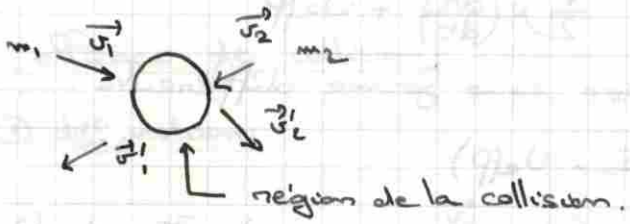
Comme $$\sigma_0 = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{\mu r^2}{\sigma_0} d\theta$$

donc $$\theta = \pm \int \frac{\sigma_0 \, dr}{r^2\left[2\mu\left(E_0 - U_{eff}(r)\right)\right]^{1/2}} + cte$$

Chap XIV : Les Collisions

# III Collision de deux particules :




Une collision de 2 particules se manifeste par une discontinuité dans les vitesses à la traversée d'une petite région de l'espace où les 2 particules se trouvent simultanément et interagissent fortement.
Nous supposerons qu'avant et après le choc, l'interaction entre les 2 particules est négligeable. Pendant le choc, $U(\vec{r}) = U(\vec{r_2} - \vec{r_1})$.

## ① conservation de la quantité de mouvement :

Le système est isolé donc :

$$\frac{d(\vec{p_1} + \vec{p_2})}{dt} = \vec{f_1} + \vec{f_2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p_1} + \vec{p_2} = cte.$$

soit $$\boxed{m_1 \vec{v'_1} + m_2 \vec{v'_2} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}}$$

Ce résultat est très général et il n'est pas nécessaire de passer par les forces. Les particules peuvent avoir changé d'état interne au cours du choc. Soient $U_1$ et $U_2$ les énergies internes avant le choc et $U'_1$ et $U'_2$ celles après le choc.

$$E_{tot} = cte = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + U_1 + U_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + U'_1 + U_2$$

puisque $E_{interaction} = 0$ avant et après le choc.

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v_1} - \vec{v_e})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v_2} - \vec{v_e})^2 + U_1 + U_2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v'_1} - \vec{v_e})^2$$
$$+ \frac{1}{2} m_2 (\vec{v'_2} - \vec{v_e})^2 + U'_1 + U'_2$$

où $\vec{v_e}$ est la vitesse d'entrainement du nouveau référentiel.

Soustrayons membre à membre :

$$\vec{v_e} \cdot (m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}) = \vec{v_e} \cdot (m_1 \vec{v'_1} + m_2 \vec{v'_2})$$

Ceci étant vrai quelle que soit la vitesse $\vec{v_e}$, on a la loi de conservation.

## ② cas de la collision élastique :

Pour connaitre $\vec{v'_1}$ et $\vec{v'_2}$, on a besoin de 6 équations. On la conservation de la quantité de mouvement n'en fournit que 3.

On fait alors l'hypothèse du choc élastique : elle consiste à postuler la conservation de l'énergie cinétique au cours du choc. C'est purement une hypothèse car les particules peuvent subir des modifications internes au cours du choc. Si on exclut les possibilités de modifications internes alors :

$$U_1 = U'_1 \text{ et } U_2 = U'_2$$

et on a
$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2}$$

On a donc toujours 2 paramètres inconnus (on pourra par exemple imposer la direction de $\vec{p'_1}$). Dans le cas de particules ponctuelles, les forces d'interactions entres $M_1$ et $M_2$ sont portées par la droite $M_1M_2$. Ce sont des forces centrales. Les trajectoires de $M_1$ et $M_2$ sont donc homothétiques de celle de G et coplanaires. Il ne subsiste donc qu'un paramètre car le plan est connu la trajectoire initiale de $M_1$ et celle de G.

On peut choisir $\theta = (\vec{v_1}, \vec{v'_1})$. $\theta$ permet de trouver les autres grandeurs mais ne sera jamais donné par les conditions initiales. (Il faudrait qu'on connaisse le processus détaillé de l'interaction).

## ③ traitement du problème dans le référentiel barycentrique :

Dans Rbarycentrique, $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$ $\quad \vec{p'_1} + \vec{p'_2} = \vec{0}$

L'hypothèse de la collision élastique se traduit par :

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m_2}$$

or $\vec{p}_1^2 = \vec{p}_2^2$ et $\vec{p}_1'^2 = \vec{p}_2'^2$ $\Rightarrow$ $\vec{p}_1^2 = \vec{p}_1'^2$

dans Rbarycentrique

$P_1 = P'_1 \quad P_2 = P'_2$

on a $\|\vec{v_1}\| = \|\vec{v'_1}\|$ et $\|\vec{v_2}\| = \|\vec{v'_2}\|$. dans R barycentrique.

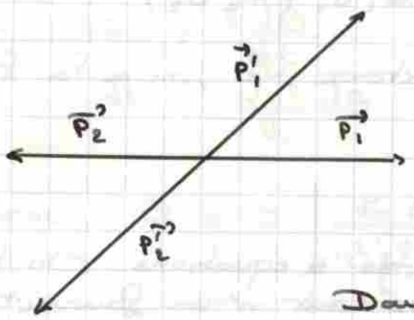
De plus $\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ est invariant

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{v'}\| = v$$

On a $\|\vec{p_i}\| = \mu v$

$$\vec{p'_1} = -\mu \vec{v'} = m_1 \vec{v'_1}$$

$$\vec{p'_2} = \mu \vec{v'} = m_2 \vec{v'_2}$$




$$\vec{v'_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v'}$$

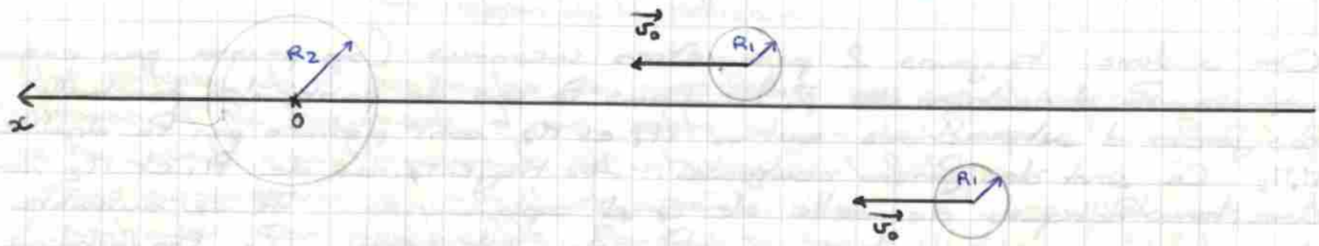
$$\vec{v'_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v'}$$

Dans R laboratoire :

$$\begin{cases} \vec{v''_1} = \vec{v_G} - \vec{v'_1} \\ \vec{v''_2} = \vec{v_G} + \vec{v'_2} \end{cases} \qquad \left\{ \vec{v''_1} = \vec{v_G} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v'} \right.$$

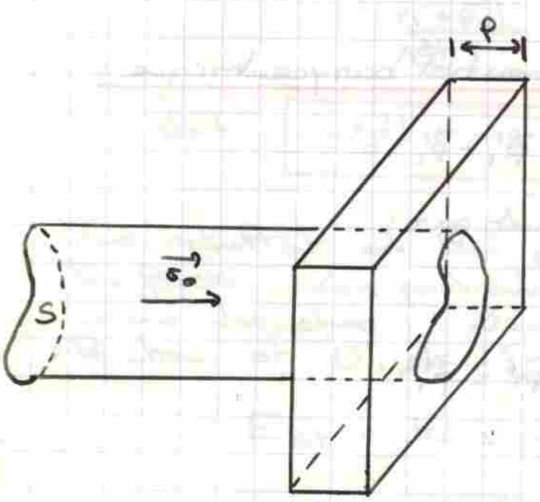
## IV Section efficace de collision :

### ① définition :




Considérons un faisceau homocinétique ($\vec{v_0}$) de particules. Les particules cibles sont fixes.

Les particules incidentes qui donneront une collision sont dans un cylindre de génératrices // à $\vec{v_0}$ et de section $\sigma = \pi a^2$ avec $a = R_1 + R_2$.




Le faisceau incident de section droite S découpe dans la cible un cylindre contenant $N_c$ particules cibles.
A toute particule cible est associé un petit cylindre de section $\sigma$ tel que toute particule du cylindre donnera une collision avec cette cible.
Si $\sigma$ petit, l faible et $N_c$ pas trop grand alors les petits cylindres n'empiètent pas les uns sur les autres.

Soit $\varphi$ le nombre de particules incidentes

Le nombre total de chocs est :

$$N_{chocs} = \frac{\sigma}{S} \varphi \Delta t \, N_c$$

La probabilité de collision pour 1 projectile est :

$$p = \frac{N_{chocs}}{\varphi \Delta t} = \frac{\sigma}{S} N_c$$

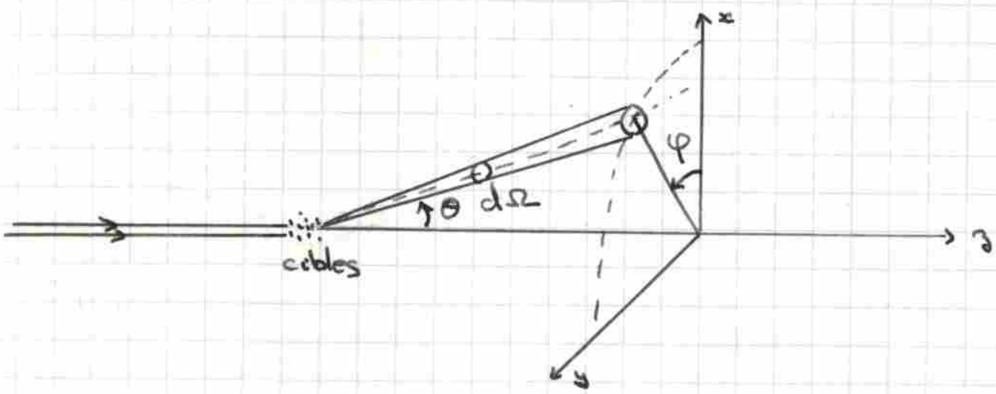
Si $n_c$ est le nombre de particules / unité de volume de la cible.

$$N_c = n_c S \ell$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = \sigma n_c \ell}$$

$\sigma$ est la section efficace (homogène à une surface). Sa représente pour une cible donnée ($\ell$, $n_c$ fixés) la probabilité de collision pour une particule incidente.

③ section efficace différentielle :




On va s'intéresser seulement aux particules qui après la collision sont diffusées dans une direction donnée $(\theta, \varphi)$.

$$d^2 N_{diffusées} = \sigma(\theta,\varphi) \, \varphi \, dt \, d\Omega \, \frac{N_c}{S} = \sigma(\theta,\varphi) \, \varphi \, n_c \, dt \, d\Omega \, \ell .$$

$\sigma(\theta,\varphi)$ est une section efficace différentielle.

On peut la relier à la section efficace totale $\sigma$ :

$$\sigma = \int \sigma(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Nous verrons une application de la section efficace avec l'expérience de Rutherford.